

## Преобразование выражений, содержащих радикалы

- Знать:** 1) формулы сокращенного умножения  
2) Свойства арифметического корня  
3) Обратить особое внимание

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ n - четное}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ n - нечетное}$$

$$(\sqrt[n]{a^n}) = a, \text{ если n - четное, то } a \geq 0.$$

- Устно:** 1) Выпишите верные неравенства:

$$\sqrt{16} = 4; \sqrt{25} = 5; \sqrt{49} = -7; \sqrt{7} = 7; \sqrt{81} = \pm 9;$$

- 2) Верно ли равенство:

а)  $(-\sqrt{2})^2 = 2$ ; б)  $-(\sqrt{2})^2 = 2$ .

- 3) Какое из выражений:  $\sqrt{5}$ ;  $-\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{-5}$ ;  $\sqrt{(-5)^2}$  не имеет смысла?

- 4) Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число: а)  $\sqrt{13}$ ; б)  $\sqrt{19}$ .

- 5) Верно ли равенство:

а)  $\sqrt{a^2} = a$ , если  $a \geq 0$

б)  $\sqrt{a^2} = -a$ , если  $a \leq 0$

в)  $\sqrt{49a^2} = -7a$ , если  $a \geq 0$

г)  $\sqrt{25m^2} = -5m$ , если  $m \leq 0$

д)  $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ , если  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$

е)  $\sqrt{\frac{4m^2}{n^4}} = \frac{2m}{n^2}$ , если  $m \geq 0$ ,  $n < 0$

- б) Упростите выражения:

а)  $3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - \sqrt{b}$

б)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$

в)  $\sqrt{3} + \sqrt{a}^2$

г)  $\sqrt{(-k)^2}$ , если  $k < 0$

- 7) Вычислите:

а)  $\sqrt[4]{40 \cdot 250}$

б)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{12} \div \sqrt{15} - 1$

в)  $\sqrt[3]{135} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{16}$

г)  $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3^4}$

д)  $\frac{\sqrt{3b} - b\sqrt{3}}{\sqrt{3b}}$ , при  $b=0,09$

- 8) Упростите:

а)  $\frac{\left(d^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{d^5}}$ ;

б)  $\left(c^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt{c^3}$ .

## Задания

1) Вычислите:

а)  $\frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})(\sqrt{60} - \sqrt{12} - \sqrt{45} + 3)}{2 - \sqrt{3}}$

б)  $\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$

в)  $\sqrt[4]{\sqrt{23} - \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{23} + \sqrt{7}} + \sqrt[6]{5\sqrt{2} + 7} \cdot \sqrt[6]{5\sqrt{2} - 7}$

г)  $\left(\frac{4}{3 - \sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{6 - 5\sqrt{6}}{5 - \sqrt{6}}\right)^2$

д)  $\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$

е)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[3]{\frac{10 + 7\sqrt{2}}{10 - 7\sqrt{2}}}$

ж)  $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{7}}$

з)  $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

2) Пусть  $a_1, \dots, a_{11}$  члены арифметической прогрессии,  $a_1 = 4, a_{11} = 64$ . Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{10}} + \sqrt{a_{11}}}$$

3) Внесите множитель под знак корня:

а)  $x^4\sqrt{-x} - (x-1)\sqrt{1-x}$

б)  $(x-5)\sqrt[8]{10-2x}$

4) Вынесите множитель из под знака корня  $\sqrt{-8a^3}$

5) Упростите выражения:

а)  $\frac{x-y}{\sqrt{-x} - \sqrt{-y}}$

б)  $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x} - \sqrt{-y}}$

в)  $\frac{\sqrt{ab} + b\sqrt{a \div b}}{\sqrt{-a}}$

г)  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}, 1 \leq x \leq 2$

д)  $\frac{\sqrt{y} - \sqrt{2x-y}}{\sqrt{y} + \sqrt{2x-y}} \cdot \sqrt{\frac{x + \sqrt{y(2x-y)}}{x - \sqrt{y(2x-y)}}}, x > y$

е)  $\frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} \div \frac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}$

ж)  $\frac{(\sqrt{a-b})^{-1} + (\sqrt{a+b})^{-1}}{(\sqrt{a-b})^{-1} - (\sqrt{a+b})^{-1}} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

з)  $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})} \cdot \sqrt{3\sqrt{2x} - 2\sqrt{3x}}$

и)  $\frac{\sqrt[3]{x + \sqrt{2-x^2}} \cdot \sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

6) Если  $x - y = \sqrt{13}, x + y = \sqrt{29}$ , то  $x^3 y^3 = ?$

7) Если  $\sqrt{15-x} - \sqrt{4-x} = 2$ , то  $\sqrt{15-x} + \sqrt{4-x} = ?$

8) Если  $\sqrt{8-a} + \sqrt{6+a} = 10$ , то  $\sqrt{(8-a)(6+a)} = ?$



Решения.

1.

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)(2\sqrt{15}-2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+3)}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)(2\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-3(\sqrt{5}-1))}{2-\sqrt{3}} =$$

а) 
$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = 4 \cdot 3 = 12$$

б) 
$$\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{27} = 1$$

в) 
$$\sqrt[4]{23-7} + \sqrt[6]{(5\sqrt{2})^2} - 7^2 = 2+1=3$$

г) 
$$\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{4(3+\sqrt{5})}{4}\right)^2 - \left(\frac{-\sqrt{6}(5-\sqrt{6})}{5-\sqrt{6}}\right)^2 = (3+\sqrt{5})^2 - 6 = 14+6\sqrt{5}-6 =$$
  
$$= 8+6\sqrt{5}$$

д) 
$$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}})^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{9-8}}{-4\sqrt{2}} = \frac{8}{-4\sqrt{2}} =$$
  
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

или 
$$3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$$
  
$$\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}}{-2} = -\sqrt{2}$$

е) 
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[3]{\frac{10+7\sqrt{2}}{10-7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(5\sqrt{2}+7)}{\sqrt{2}(5\sqrt{2}+7)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 1$$
  
$$= (\sqrt{2}-1)^2 \cdot \sqrt[3]{99+70\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1 = 7+5\sqrt{2}$$
$$10+7\sqrt{2} = \sqrt{2}(5\sqrt{2}+7)$$

ж) 
$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3} + \frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{7}}{1} =$$
  
$$= \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7} = 0$$

з) 
$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

2.  $a_1 = 4$        $a_{11} = 64$

$$64 = 4 + d \cdot 10$$
$$d = 6$$

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{10}} - \sqrt{a_{11}}}{a_{10} - a_{11}} = \frac{\sqrt{a_{11}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{8-2}{d} = \frac{6}{d} = 1$$

3. a)  $x^4\sqrt{-x} - (x-1)\sqrt{1-x} = -\sqrt{-x^5} + \sqrt{(1-x)^3}$

б)  $(x-5)^8\sqrt{10-2x} = -\sqrt[8]{2(5-x)^9}$

4.  $\sqrt{-8a^3} = |a|\sqrt{-8a} = -a\sqrt{-8a}$

5. a)  $\frac{x-y}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}} = \frac{(\sqrt{-x})^2 + (\sqrt{-y})^2}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}} = \frac{(\sqrt{-x}-\sqrt{-y})(\sqrt{-x}+\sqrt{-y})}{-(\sqrt{-x}-\sqrt{-y})} = -\sqrt{-x}-\sqrt{-y}$

б)  $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}} = \frac{-(\sqrt{-x})^2 - (\sqrt{-y})^2 + 2\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}} = -\frac{(\sqrt{-x}-\sqrt{-y})^2}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}} = -\sqrt{-x}-\sqrt{-y}$

в)  $\frac{\sqrt{ab} + b\sqrt{a \div b}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{(-a)(-b)} - (\sqrt{-b})^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{-a}{-b}\right)^2}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{-a}(\sqrt{-b} - \sqrt{-b})}{\sqrt{-a}} = 0$

г)

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1| = 1-\sqrt{x-1}$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1$$

$$-1 \leq \sqrt{x-1} - 1 \leq 0$$

д)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{y}-\sqrt{2x-y}}{\sqrt{y}+\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{y(2x-y)}}}{\sqrt{x-\sqrt{y(2x-y)}}} &= \frac{\sqrt{y}-\sqrt{2x-y}}{\sqrt{y}+\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{x+\sqrt{y(2x-y)}}{x-y} = \\ &= \frac{(y-2\sqrt{y(2x-y)}+2x-y)(x+\sqrt{y(2x-y)})}{(y-2x+y)(x-y)} = -\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^2} = -1 \end{aligned}$$

e) 1)  $\frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} \div \frac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn} = \frac{(2\sqrt{m} + 2\sqrt{n})(\sqrt{m}\sqrt{n})(m + \sqrt{mn} + n)}{2(\sqrt{m} - \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n})} =$   
 $= m + \sqrt{mn} + n$

2)  $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$



$$11. \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$$

$$\left(x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(y^2 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a$$

$$\left(x^{\frac{4}{3}} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(y^{\frac{4}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = a$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = a$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$12. 1) \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{1} = \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$2) \frac{1}{x+2} + 3,6 = \frac{1}{2,5} + 3,6 = \frac{10}{25} + 3,6 = 0,4 + 3,6 = 4$$

13.

$$\frac{(x+6)(x+3)(x-1)(x-2)}{x^2} = \frac{(x^2+5x-6)(x^2+x-6)}{x^2} = \left(x+5-\frac{6}{x}\right)\left(x^2+1-\frac{6}{x}\right) = (-7+5)(-7+1) =$$

$$= -2 \cdot (-6) = 12$$

$$x - \frac{x}{6} = \frac{\sqrt{73}-7}{2} - \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{73}-7} = \frac{\sqrt{73}-7}{2} - \frac{6(\sqrt{73}-7)}{24 \cdot 2} = \frac{\sqrt{73}-7-\sqrt{73}-7}{2} = -7$$

$$14. \frac{x^4 - 6(x+1)^2}{x^2(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} - \frac{6(x+1)}{x^2} = 1 - 6 = -5$$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2(3-\sqrt{5})} = 1$$

$$15. y = \frac{8}{\sqrt[4]{x^2-1}} + \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{2}$$

$$\frac{\frac{8}{\sqrt[4]{x^2-1}} + \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{8}{\sqrt[4]{x^2-1}} + \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{2}}$$

$$\frac{8}{\sqrt[4]{x^2-1}} + \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{2} \geq 4$$