

## Обратные тригонометрические функции

Материалы помогут вырабатывать у учащихся умения и навыки строить графики функций:

$$y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arccos(\cos x), \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), \quad y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x).$$

I. Актуализация:

а) Свойства обратных тригонометрических функций:

$$1. y = \arcsin x$$

$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$3. y = \operatorname{arctg} x$$

$$D(y) = \mathbb{R}$$

$$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2. y = \arccos x$$

$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = [0; \pi]$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\cos(\arccos a) = a \in [-1; 1]$$

$$\arccos a(\cos x) = x, \quad x \in [0; \pi]$$

$$4. y = \operatorname{arcctg} x$$

$$D(y) = \mathbb{R}$$

$$E(y) = (0; \pi)$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad x \in (0; \pi)$$

б) Графики обратных функций:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

II. Объяснение нового материала:

1. Функция  $y = \arcsin(\sin x)$  - функция периодическая с периодом  $2\pi$

$$y = \sin x; \quad T = 2\pi$$

Исследуем функцию на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ , разобьем на промежутки  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$a) \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \arcsin(\sin x) = x$$

$$y = x$$

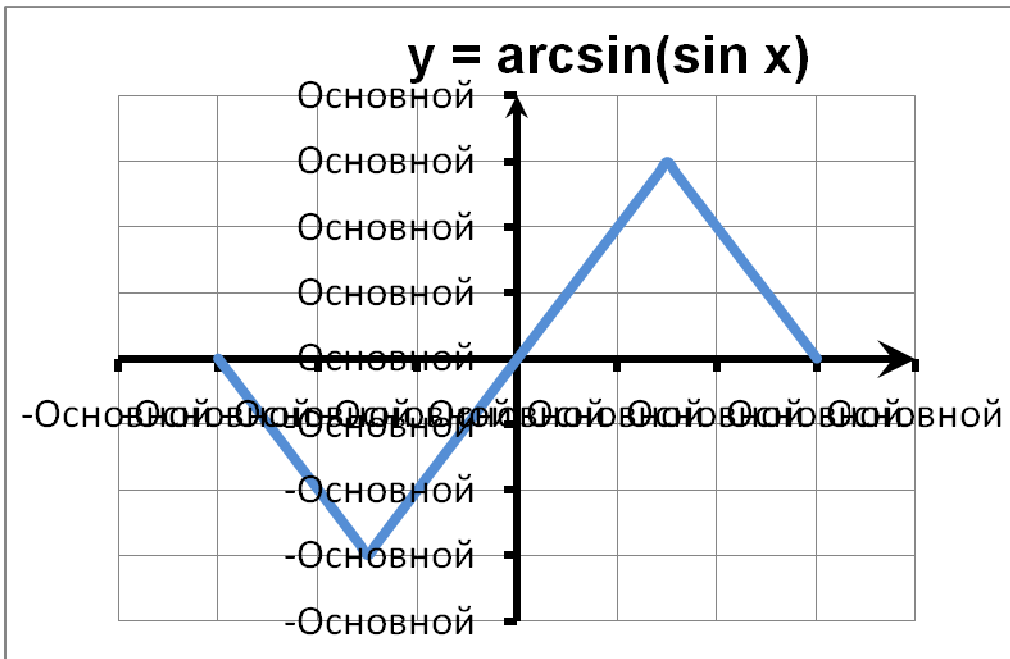
$$б) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sin x = \sin \alpha \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2} \right];$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$y = \pi - x$$

График:



III. Формирование умений и навыков:

Вычислить:

$$1) \arcsin\left(-\sin\frac{7\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right) =$$

$$2\pi < \frac{7\pi}{3} < \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= \arcsin\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = -\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{3}$

$$2) \arcsin(\sin 11)$$

$$\sin \alpha = \sin 11$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{2} < 11 < 4\pi$$

$$\sin \alpha = \sin 11 = \sin(11 - 4\pi)$$

$$-\frac{\pi}{2} < 11 - 4\pi < 0$$

$$\alpha = 11 - 4\pi$$

Ответ:  $11 - 4\pi$

$$3) \arcsin(\sin 980^\circ) =$$

$$980^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 80^\circ$$

$$\sin 980^\circ = \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$= \arcsin(-\sin 80^\circ) = -\arcsin(\sin 80^\circ) = -80^\circ$$

Ответ:  $-80^\circ$

IV. Объяснение нового материала:

Функция  $y = \arccos(\cos x)$

$\cos x$ ,  $T=2\pi$

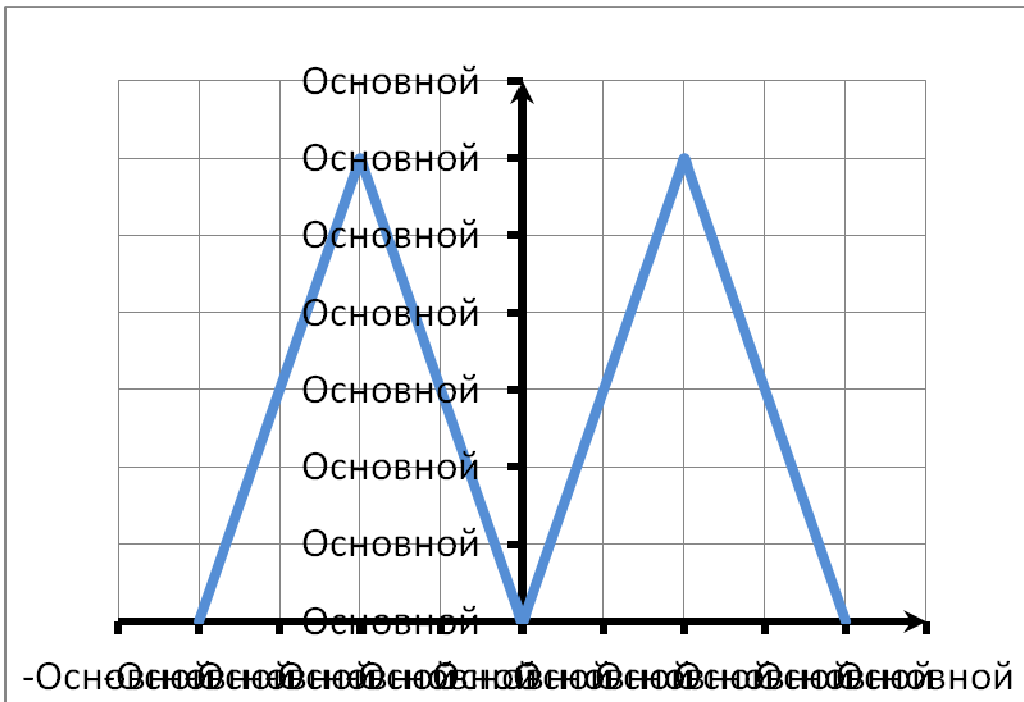
$[0; 2\pi]$  – разобьем на промежутки

$x \in [0; \pi]$

б)  $x \in [\pi; 2\pi]$

а)  $y=x$

б)  $y=2\pi-x$



V. Формирование умений и навыков:

Вычислить:

$$1) \arccos\left(\cos\left(-\frac{18\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{18\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{2\pi}{5}$$

Ответ:  $\frac{2\pi}{5}$

$$2) \arccos\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right) = \arccos\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)\right) = \arccos\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right) = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

Ответ:  $\frac{7\pi}{8}$

$$3) \arccos(\cos 980^\circ) = \arccos(\cos(3 \cdot 360^\circ - 100^\circ)) = \arccos(\cos 100^\circ) = 100^\circ$$

Ответ:  $100^\circ$

3. Функция  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

D(y): объединение интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2} + R\pi; \frac{\pi}{2} + R\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{tg} x$ ; T =  $\pi$

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$$

$$y = x$$

Вычислить:

$$1) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{2\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\right) = -\frac{\pi}{7}$$

$$2) \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} - 6) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(6 - 2\pi)) = 2\pi - 6$$

4. Функция  $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$

D(y):  $\cup (R\pi; \pi + R\pi), R \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x; T &= \pi \\ \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) &= x \\ y &= x \end{aligned}$$

Вычислить:

$$1) \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{25\pi}{8}\right)\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{25\pi}{8}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(3\pi + \frac{\pi}{8}\right)\right) = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

$$2) \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-10)) = \pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}10) = [10 = 3\pi + \alpha, \alpha = 10 - 3\pi] = \pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-10 - 3\pi)) = \pi - 10 + 3\pi = 4\pi - 10$$

Задания для самостоятельного решения:

1)  $\arcsin(\sin 3)$ ;

2)  $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right)$ ;

3)  $\arcsin(\sin 2010^\circ)$ ;

4)  $\arcsin(\sin 2010)$ ;

5)  $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$ ;

6)  $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{10}\right)$ ;

7)  $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$ ;

8)  $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{5}\right)\right)$ ;

9)  $\arccos(\cos 2010^\circ)$ ;

10)  $\arccos(\cos 2010)$ ;

11)  $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$ ;

12)  $\arccos(\sin(-3))$ ;

**Ответы:** 1)  $\pi - 3$ ; 2)  $-\frac{3\pi}{7}$ ; 3)  $-30^\circ$ ; 4)  $2010 - 640 \cdot \pi$ ; 5)  $\frac{7\pi}{18}$ ; 6)  $-\frac{\pi}{5}$ ; 7)  $\frac{\pi}{4}$ ; 8)  $\frac{3\pi}{5}$ ; 9)  $150^\circ$ ;

10)  $640 \cdot \pi - 2010$ ; 11)  $\frac{11\pi}{18}$ ; 12)  $\frac{3\pi}{2}$ .