

Астапович Ирина Вячеславовна, учитель математики высшей квалификационной категории ГУО «Гимназия № 3 г. Бобруйска»

**Тема урока: „Решение иррациональных уравнений”**

**Девиз урока:** «Решай, ищи, твори и мысли»

**Цель урока:** Организовать деятельность учащихся по совершенствованию умений и углублению знаний решения иррациональных уравнений базового и повышенного уровней сложности для накопления опыта действий.

**Задачи:**

Образовательные:

- вырабатывать навыки решения проблемы на основе имеющейся информации;
- вырабатывать навыки решения иррациональных уравнений с выбором эффективных методов решения.

Развивающие:

- продолжать развивать логическое мышление, математическую зоркость и внимание;
- продолжать развивать умение действовать в различных учебных ситуациях, принимать самостоятельные решения и выдвигать собственные идеи;
- продолжать развивать навыки совместного сотрудничества.

Воспитательные:

- продолжать воспитывать коммуникативную культуру, серьезное отношение к математике, целеустремленность и организованность.

**Тип урока:** урок комплексного применения знаний и способов действий.

**Оборудование:**

- кейс (раздаточный материал) для каждого учащегося;
- презентация «Иррациональные уравнения»;
- компьютер;
- мультимедийный проектор;
- экран.

**Уровень изучения – повышенный**

**Кейс-ситуация:** «Из-за большого количества методов решений иррациональных уравнений они разнообразно представлены в материалах централизованного тестирования по математике».

**Вид ситуации:** функциональный

**Задача:** Исследовать иррациональные уравнения. Произвести классификацию методов решения уравнений. Рассмотреть уравнения, которые не решаются стандартными методами. «Открыть» новые методы решения уравнений.

**Ход урока.**

**1.Организационный момент (2 мин.)**

Учащиеся сидят за столами в группах по 5-6 человек, перед каждым из них лежит «кейс». Прежде чем приступить к работе, каждый из вас должен поставить перед собой цель сегодняшнего урока. Выберите те цели, которые

соответствуют вашим, и поставьте напротив знак «+» или допишите свою цель.

Фамилия и имя: \_\_\_\_\_

Цели:		Учебные элементы
Продолжить формирование умений решать иррациональные уравнения.		Домашняя работа
Продолжить формирование самоконтроля, взаимоконтроля, самоанализа.		Защита проекта
Продолжить учиться работать в команде.		оформление
Продолжить учиться самостоятельной работе с разными источниками информации, отбору необходимого, сравнению и установлению связей между известными фактами и явлениями.		представление
Продолжить формирование навыков анализа полученной информации и ее применения к решению проблемы.		ответы на вопросы
Получить хорошую оценку.		Классификация уравнений по методам
Свои цели:		Умение работать в команде

Иррациональные уравнения, которые предложены в заданиях на экзамене, часто оказываются вполне решаемыми, но встречаются и уравнения, которые решаются нестандартными методами. Их немного, если их освоить, то решение таких уравнений становится вполне посильной задачей для вас.

## **2.Ознакомление с конкретной ситуацией – «кейсом» (8 мин.)**

Кейс предоставляется ученикам непосредственно на занятии.

«Кейс» включает в себя:

1. Вопросы самоконтроля
3. Историческая справка
4. Карточка с заданиями.
5. Иррациональные уравнения
6. Карточка оценки умений учащегося.
7. Карточка «Домашнее задание»
8. Режим работы

Правила работы над кейсом.

Все решения заданий следует записывать в тетради. В данном кейсе нельзя писать решения. Внимательно читайте теоретический материал и выполняйте задания. За консультацией можно обращаться к учителю. Следите за временем, отведенным на каждый этап работы.

Наша общая задача состоит в том, чтобы составить таблицу классификации методов решения иррациональных уравнений.

Учащиеся изучают «кейс» и пытаются выяснить причину возникновения проблемы, оценивают с точки зрения достаточности или недостаточности для решения задачи. Каждый учащийся отвечает на вопросы: «Что я знаю по ситуации из «кейса»?», «Что еще необходимо узнать?».

## 2. Работа в группах. Обсуждение альтернативных решений (12 мин.)

Участники в группах выбирают «модератора», координирующего работу, «секретаря» – фиксирующего результаты работы и «шкипера» – представляющего проект на общее обсуждение.

В процессе обсуждения завязывается дискуссия, и в споре рождается истина. Технология кейс-стади делает основной акцент на самостоятельное мышление, способность доносить свои мысли до аудитории и конструктивно отвечать на критику своих оппонентов.

**Задание 1.** Из предложенных уравнений назовите номера тех, которые являются:

- а) линейными;
- б) квадратными;
- в) тригонометрическими;
- е) уравнения с модулем.

Уравнения:

- 1)  $5x - 18 = 3x + 5$
- 2)  $2^x + 4^x = 3$
- 3)  $\cos 2x = 0,5$
- 4)  $x^2 + 3x - 5 = 0$
- 5)  $|x - 5| = 2x + 3$
- 6)  $\sqrt{56 - 2x} = 6$
- 7)  $\sqrt{-72 - 17x} = -x$
- 8)  $|x^2 - 5x| = 4|x|$
- 9)  $x - 3 = 6$
- 10)  $3x^2 - 4x + 4 = 8$

**Задание 2.** Определить, каким методом решается каждое из уравнений.

1. $3\sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt[3]{x + 1} + 2\sqrt[3]{x - 1}$	
2. $x^2 + 3x - 18 + \sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$	
3. $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{3x + 1} = \sqrt[3]{x - 1}$	
4. $\sqrt{3x - 2 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2} - \sqrt{x}$	
5. $\sqrt{x + 1} + 1 - \sqrt{x + 10} - 4 = x$	
6. $\sqrt{6x^2 + 12x + 31} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 7 - x^2 - 2x$	
7. $x + \sqrt{x} + \sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 + 4} = 3$	
8. $\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$	

### Задание 3. Решить уравнения

1)  $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$

2)  $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2} = 1$

3)  $\sqrt{16-8x+x^2} + \sqrt{4x^2-13x-17} = x-4$

4)  $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x} = 9-2x$

Каждый из учащихся высказывает своё мнение о решении проблемы, вместе обсуждают предложенные им уравнения, выполняют задания.

### 3. Резолюция. Принятие решения в группе (5 мин.)

Учащиеся сопоставляют варианты и выбирают лучший из предложенных, группа формулирует общее решение.

### Физкультминутка (2 мин.)

### 4. Дискуссия (8 мин.)

Каждая группа демонстрирует результаты.

От каждой группы выступает один представитель (руководитель), который аргументирует решение группы. Учащиеся слушают, дополняют, выбирают рациональное решение. Каждый учащийся заполняет карточку оценки умений.

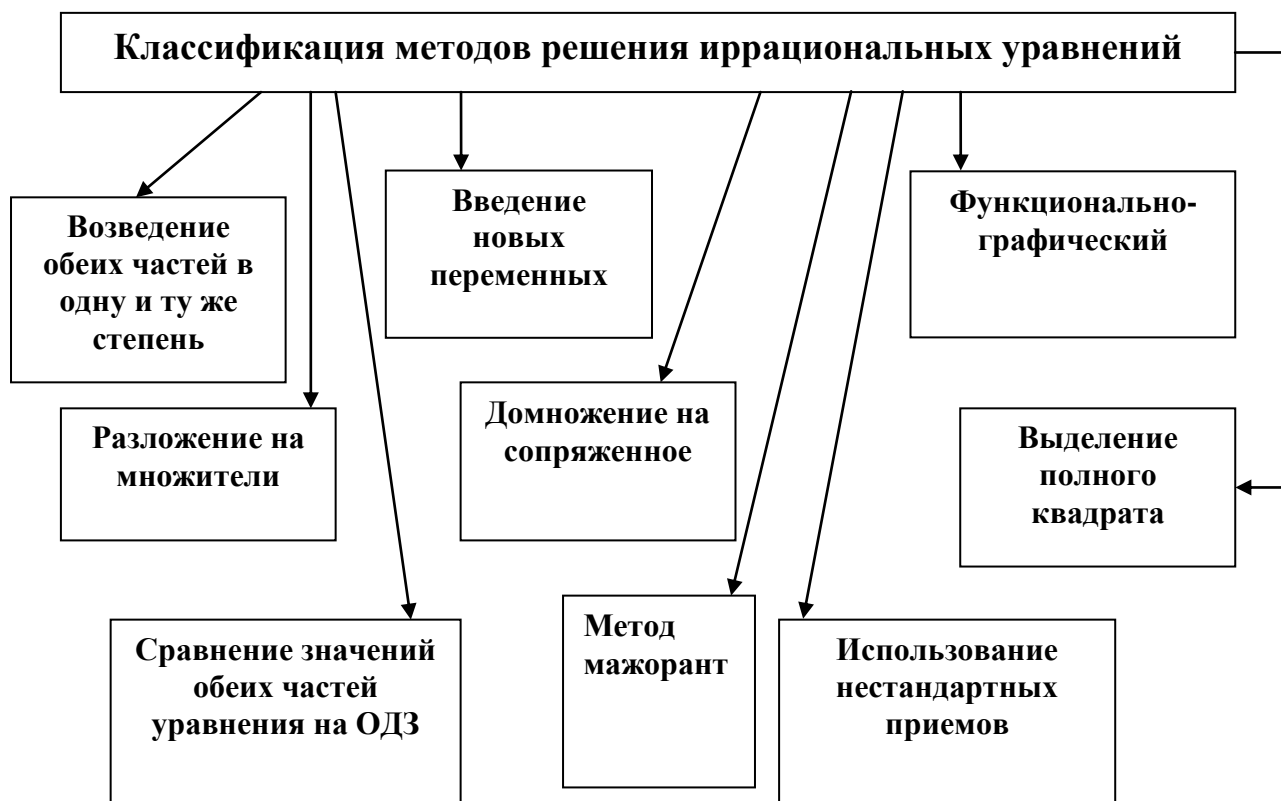
### 5. Сопоставление итогов (5 мин.)

Сравнение решений, принятых в группах.

Итак, ребята, для каждого иррационального уравнения необходимо выбирать наиболее рациональный способ решения: понятный, доступный, логически грамотно оформленный. Решение иррациональных уравнений требует от учащихся хороших теоретических знаний, умений применять их на практике, требует внимания, трудолюбия, сообразительности.

Вы прослушали отчет каждой группы. Узнали другие методы решения иррациональных уравнений, и теперь прошу дописать в группах таблицу классификации методов решения иррациональных уравнений.

Предлагаю вашему вниманию мою таблицу классификации методов решения иррациональных уравнений.



В вашей таблице нет метода нестандартных приемов. Решение одного из уравнений таким методом:

$$\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

$$x + 1 \left( 2 + \sqrt{x + 1} + 3 \right) + 3x \left( 1 + \sqrt{9x^2 + 3} \right) = 0$$

$\sqrt[3]{2 - x} = 2 - x^3$ . Допишите в ваши таблицы и этот метод.

Прикрепите магнитами ваши ответы к доске магнитами и сравните, что у вас получилось, с тем, что должно быть (презентация)

**6. Домашнее задание (1 мин.)**

**7. Рефлексия. (2 мин.)**

Подведение итогов урока.

Возьмите, пожалуйста, свои оценочные листы и поставьте себе баллы, максимальное количество баллов указано за каждый этап. Сложите и сосчитайте баллы.

Оцените степень сложности урока; оцените степень усвоения материала, степень интереса познания.

Ключевые вопросы учителя при анализе ситуации: «Что вы сделали?», «Какие аспекты действия вы считаете правильными?», «Что можно было сделать лучше?», «Как вы можете решить эту проблему?», «Что мы могли бы сделать?», «В чем состоит проблема?», «Каковы возможные пути подхода к проблеме?», «Что может произойти и к чему может привести, если...?»

Так чем же отличалась ваша деятельность на сегодняшнем уроке от предыдущих уроков?

Попробуйте понять, для чего лично Вам может пригодиться сегодняшнее занятие.

## Содержание кейса

### Карточка для самооценки

Фамилия,

имя учащегося \_\_\_\_\_

	Выполнил самостоятельно	Исправил при работе в группе	Не выполнил	Баллы (от 0 до 10)
Задание 1				
Задание 2				
Задание 3				
Оцените свою работу в группе (от 0 до 10 балла):				
Работа в группе.				
Участие в обсуждении.				
Участие в презентации деятельности группы (0-10 балла):				

### Домашнее задание

Решить иррациональные уравнения

- $\sqrt{x+8} = -7$ ;
- $\sqrt{x-7} = 5$ ;
- $\sqrt[3]{x+2} = 3$ ;
- $\sqrt{16-\sqrt{x+1}} = 4$ ;
- $\sqrt{x} = 2-x$ ;
- $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$
- $\sqrt[3]{x^2+4x-50} = 3$
- $\sqrt{15x+19}-5 = 3x$
- $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$
- $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}+1 = 3x$
- $\sqrt[3]{x^2+14x-16} = -4$
- $\sqrt{15-3x}-1 = x$
- $\sqrt{8-5x} = \sqrt{x^2-16}$ ;
- $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}-4x = 5$

### Этапы работы групп

Этапы	Цель этапа
Знакомство с конкретным случаем	Понимание проблемной ситуации и ситуации принятия решения

<b>Поиск:</b> оценка информации, полученной из материалов задания, и самостоятельно привлеченной информации	Научиться добывать информацию, необходимую для поиска решения и оценивать ее
<b>Обсуждение:</b> обсуждение возможностей альтернативных решений	Развитие альтернативного мышления
<b>Резолюция:</b> нахождение решения в группах	Сопоставление и оценка вариантов решения.
<b>Диспут:</b> отдельные группы защищают свое решение	Аргументированная защита решений
<b>Сопоставление итогов:</b> сравнение решений, принятых в группах	Оценить взаимосвязь интересов, в которых находятся отдельные решения

### Вопросы самоконтроля:

1. Что требуется для полученных значений переменной при решении иррациональных уравнений? (проверка)
2. Способ, которым проводится проверка решений иррациональных уравнений, (подстановка)
3. Как называется знак корня? (радикал)
4. Сколько решений имеет уравнение  $x^2 = a$ , если  $a < 0$ ? (ноль)
5. Как называются уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная (иррациональное).
6. Как называется корень второй степени? (квадратный)
7. Сколько решений имеет уравнение  $x^2 = 0$ . (Одно)
8. Корень какой степени существует из любого числа? (Нечетной)
9. Как называется корень третьей степени? (кубический)
10. Сколько решений имеет уравнение  $x^2 = a$ , если  $a > 0$ ? (Два)
11. Как называется корень уравнения, который получается в результате неравносильных преобразований? (посторонний)
12. Корень какой степени существует только из неотрицательного числа? (четной)
13. Как называется равенство двух алгебраических выражений? (уравнение)
14. Как называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство? (корень)
15. Какая черта личности поможет при решении иррациональных уравнений? (трудолюбие)
16. Какой должен быть взгляд на уравнения, что бы не вычисляя сказать ответ? (пристальный)
17. Как называют уравнения, если они имеют одни и те же корни или не имеют корни вообще? (равносильные)

18. Как называется иррациональное выражение, содержащее противоположное арифметическое действие? (сопряжённое)
19. Какими методами решаются иррациональные уравнения?
20. Расскажите алгоритм решения методом возведения в степень, равную показателю корня.
21. Расскажите алгоритм решения методом введения новой переменной.
22. Какой этап содержат все эти методы?
23. Какой метод используется при решении иррациональных уравнений другими методами?
24. Какой метод предполагает устное решение? Метод «пристального взгляда»?
25. На каких свойствах иррациональных выражений основан этот метод?

### Иррациональные уравнения

N	A	B
1	$\sqrt{x^2} = 9$	$\sqrt{x^2} = -2$
2	$\sqrt{x} = 4$	$\sqrt[3]{x} = 2$
3	$\sqrt[4]{x+1} = 1$	$\sqrt{4-x} = 7$
4	$\sqrt{2x} = -1$	$\sqrt{3x} = 2$
5	$\sqrt[3]{x+7} = 1$	$\sqrt{x-3} = 1$
6	$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{8}$	$\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt[3]{7}$
7	$\sqrt{1-x^2} = 2$	$\sqrt{2-y^2} = 3$
8	$2 + \sqrt{x} = 0$	$-8 + \sqrt{y} = 0$
9	$\sqrt{x+4} = 5$	$\sqrt{x-7} + 3 = 0$
10	$\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x+1}$	$(x-4)(x+1)\sqrt{1-x} = 0$
11	$\sqrt[6]{1-y} = 2$	$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = -3$
12	$\sqrt{z+2} = \sqrt{2z+3}$	$\sqrt{1-y} = \sqrt{y+4}$
13	$\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = -6$	$(x+6)\sqrt{x-7} = 0$
14	$\sqrt[3]{y+1} = 2$	$\sqrt{y-3} = 4$
15	$\sqrt[3]{y+7} = -1$	$(x-3)\sqrt{x-1} = 0$
16	$(x-2)\sqrt{1-x} = 0$	$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + 3 = 0$
17	$\sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{2x+7}$	$\sqrt[4]{2y+3} = 1$
18	$\sqrt{1-x^2} = 1$	$\sqrt{6-z} = 4$

### Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называют **иррациональным уравнением**.

Одним из самых простых приемов решения иррациональных уравнений является метод освобождения от радикалов путем последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую натуральную степень. При этом, если обе части уравнения возводятся в нечетную степень,



то проверка не нужна; если же обе части уравнения возводятся в ЧЕТНУЮ СТЕПЕНЬ, то необходимо выполнить ПРОВЕРКУ.

**1.**  $\sqrt{x+2} = x$ .

возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x + 2 = x^2,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = 2.$$

*Проверка:*

1)  $x = -1$ , тогда  $\sqrt{-1+2} = -1, 1 = -1$  неверно;

2)  $x = 2$ , тогда  $\sqrt{2+2} = 2, 2 = 2$  верно.

*Ответ:*  $x = 2$ ;

**2.**  $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 - 2x = 0$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1,$$

$$x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$x^2 + 5x + 4 = 4x^2 - 4x + 1,$$

$$x(x - 3) = 0,$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 3.$$

*Проверка:*

$x_1 = 0$ , то  $\sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 1} + 1 - 2 \cdot 0 \neq 0$ , значит,  $x_1 = 0$ , не удовлетворяет уравнению.

$x_2 = 3$ , тогда  $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} + 1 - 2 \cdot 3 = 0$ , значит  $x_2 = 3$  корень уравнения.

*Ответ:*  $x = 3$ .

**3.**  $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$

возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$2x - 3 = x - 2, x = 1.$$

*Проверка:*  $\sqrt{2 \cdot 1 - 3} = \sqrt{1 - 2}$  — обе части уравнения не имеют смысла

*Ответ:* корней нет.

**4.**

*Решить уравнение*  $\sqrt{x-1} = 3-x$

$$\sqrt{x-1} = 3-x$$

$$(\sqrt{x-1})^2 = (3-x)^2$$

$$x-1 = 9-6x+x^2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 5$$

*Проверка:*  $x_1 = 2$

$$\sqrt{2-1} = 3-2$$

$$x_2 = 5$$

$$\sqrt{5-1} \neq 3-5 \text{ — не является корнем}$$

*Ответ:*  $x = 2$

$$5. \sqrt{2x-1} = x-2,$$

$$\sqrt{2x-1} = x-2,$$

$$2x-1 = x^2-4x+4,$$

$$x^2-6x+5=0,$$

$$x_1=5,$$

$$x_2=1 - \text{постор. корень}$$

Проверка:

$$x=5, \quad \sqrt{2 \times 5 - 1} = 5 - 2, \quad 3 = 3 - \text{верно}$$

$$x=1, \quad \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1 - 2, \quad 1 = -1 - \text{неверно}$$

Ответ:  $x=5$

$$6. \sqrt[3]{x+5} = 5$$

Возведём обе части уравнения в третью степень:

$$(\sqrt[3]{x+5})^3 = 5^3$$

$$x+5 = 125$$

$$x = 120$$

Проверка:  $\sqrt[3]{120+5}=5$  - верно.

Ответ:  $x=120$

Задание: решить уравнение.

$$1. \sqrt{8-\frac{x}{4}} = 6$$

$$2. \sqrt[3]{35-x^2} = 2$$

$$3. \sqrt{19-x^2} = 3$$

$$4. \sqrt[3]{x^2+4x+6} = 3$$

$$5. \sqrt[4]{246+23x+5x^2} = 4$$

$$6. \sqrt[4]{102-52x+7x^2} = 3$$

$$7. \sqrt[4]{64x^2+32x+85} = 3$$

$$8. \sqrt[4]{49x^2-14x+257} = 4$$

$$9. \sqrt[3]{7x^3+36x^2+63x+27} = 2x+3$$

$$10. \sqrt[3]{9x^3-36x^2+53x-27} = 2x-3$$

$$11. \sqrt[3]{9x+1} = 3x+1$$

$$12. \sqrt[3]{7-2x} = 4x+8$$

$$13. \sqrt{6-14x+9x^2} = 2x-1$$

$$14. \sqrt{-23+6x+6x^2} = 3x-2$$

$$15. \sqrt{5x+1} = \sqrt{7x-9}$$

$$16. \sqrt[3]{4x-7} = \sqrt[3]{3x-4}$$

$$17. \sqrt{6x^2-3x-1} = \sqrt{2x-1}$$

$$18. \sqrt{7x^2+x-2} = \sqrt{7x-2}$$

$$19. (7x-4)\sqrt{8+3x} = 0$$

$$20. (3x+5)\sqrt{7+3x} = 0$$

$$21. (x^2+8x+15)\sqrt[3]{4x-7} = 0$$

$$22. (x^2+6x+5)\sqrt{9x-2} = 0$$

$$23. (8-3x)\sqrt{10+3x-4x^2} = 0$$

$$24. (7-4x)\sqrt[3]{2-7x-9x^2} = 0$$

$$25. 5x+\sqrt{2-x} = 6-\sqrt{2-x}$$

$$26. \sqrt{x^2-6} = \sqrt{-5x}$$

$$27. \sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$28. 10\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 3 = 0$$

$$29. \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 4$$

$$30. \sqrt[4]{(x+1)^2} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$